

УДК 539.3

Чемерис О.М. к.т.н., доц.

НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН

Chemieris O.

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

VIBRATION OF THE CIRCULAR ANNULAR PLATE WITH

Кругла кільцева пластина закріплена шарнірно по внутрішньому контуру. Зовнішній контур защемлений чи вільний. В роботі визначаються власні частоти та радіуси вузлових кілець для симетричних і несиметричних коливань пластинки. При рішенні задачі використані функції Бесселя різного роду нульового і першого порядку. Для кожної форми коливань з числом вузлових діаметрів $n=0,1,2$ складені частотні рівняння та рівняння для визначення положення вузлових кілець. Проведені обчислення власних частот та радіусів вузлових кілець в випадку, коли число вузлових діаметрів $n=0,1,2$, а число вузлових кілець $s=0,1,2$. Робота може бути використана для визначення власних частот і форм власних коливань елементів машин та приладів.

Ключові слова: кільцева кругла пластинка, шарнірно, частоти, форма.

Круглі пластинки зустрічаються в різного типу конструкціях в вигляді днищ, діафрагм, пружин. Рішення задач по визначенню частот власних коливань для кільцевих пластин приведені в роботах [1-2]. В даних роботах розглянуті пластинки з защемленим внутрішнім контуром, зовнішній контур защемлений, шарнірний чи вільний. В даних роботах також приведені рішення по визначенню частот коливань кільцевої пластинки з вільними краями. Положення вузлових діаметрів в даних роботах не визначалося. Алгоритми рішення та результати обчислень частотного параметра для вузлових даних випадків приведені також в довідниках [3-4]. Довідкові дані по визначенню частот таких пластин приведені і в роботі [5]. Частоти і форми коливань кільцевих шарнірно закріплених пластин визначені в роботі [6]. В роботі [7] визначені частоти і форми пластинки защемленої по внутрішньому контуру з ковзною зовнішньою границею.

Мета досліджень

Привести довідкові дані, які необхідні при проведенні обчислень частот і форм власних коливань круглих кільцевих пластин з внутрішньою шарнірною та при защемленні чи вільному іншому торці. На основі точного методу скласти рівняння для визначення частотного параметра в випадку для симетричних і несиметричних коливань. Провести рішення даних рівнянь для різних форм коливань та визначити положення вузлових діаметрів при різних формах коливань. Розрахунки частот і форм коливань провести для різного співвідношення внутрішнього та зовнішнього діаметрів. Привести результати обчислень частот і форм коливань пластинки з внутрішнім шарнірним торцем, а на зовнішньому розглянути варіанти защемлення та вільного краю.

Основна частина

Рівняння коливань стиснутої круглої пластинки матиме такий вигляд [5]

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\rho} + \frac{\partial}{\rho\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2\partial\theta^2}\right)^2 w + b^4 m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

∇^2 – оператор Лапласа, E – модуль Юнга, μ – коефіцієнт Пуассона, $D = Eh / 12(1 - \mu^2)$

b – зовнішній радіус пластинки, r – змінний радіус пластинки, b – внутрішній

$\rho = r / b$ – відносний змінний радіус пластинки ($c \leq \rho \leq 1$), $c = \frac{a}{b}$

w – нормальні переміщення точок пластинки,

m – маса пластинки на одиницю площі,

θ – кутова координата, t – час

По методу розділення змінних рішення даного рівняння можна записати в вигляді

$$w(\rho, \theta, t) = (C_1 I_n(k\rho) + C_2 J_n(k\rho) + C_3 K_n(k\rho) + C_4 Y_n(k\rho)) \cos n\theta \cos \omega t \quad (1)$$

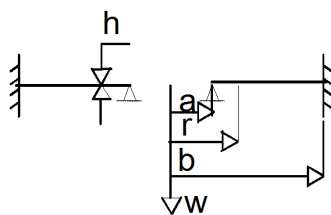


Рис. 1. Розрахункова схема 1 кільцевої пластинки з ковзною

де C_i – сталі величини, I_n, J_n, K_n, Y_n – функції Бесселя, ω – кругова частота коливань, ($n=1, 2, 3, \dots$), k – невідоме число (частотний параметр) $k^4 = m\omega^2 b^2 / D$.
Нехай пластинка по внутрішньому краю шарнірно закріплена, а по зовнішньому краю защемлена. Граничні умови (Рис.1)

$$w(c, \theta, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(c, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w(c, \theta, t)}{k^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w(c, \theta, t)}{k \partial \rho} \right) = 0,$$

$$w(1, \theta, t) = 0, \quad \frac{\partial w(1, \theta, t)}{\partial \rho} = 0 \quad (2)$$

Із формул(1), (2) одержимо лінійну однорідну лінійну систему чотирьох

$$\begin{aligned} C_1 I_n(ck) + C_2 J_n(ck) + C_3 K_n(ck) + C_4 Y_n(ck) &= 0 \\ C_1 L I_n(ck) + C_2 L J_n(ck) + C_3 L K_n(ck) + C_4 L Y_n(ck) &= 0 \\ C_1 L I_n(k) + C_2 L J_n(k) + C_3 L K_n(k) + C_4 L Y_n(k) &= 0 \\ C_1 L_1 I_n(k) + C_2 L_1 J_n(k) + C_3 L_1 K_n(k) + C_4 L_1 Y_n(k) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$L = \frac{d}{d\rho}; S = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{\partial}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \cdot \partial r^2} \right)$$

Прирівнюємо до нуля визначник даної системи і знаходимо

$$\begin{vmatrix} I_n(ck)J_n(ck)K_n(ck)Y_n(ck) \\ LI_n(ck)LJ_n(ck)LK_n(ck)LY_n(ck) \\ I_n(k)J_n(k)K_n(k)Y_n(k) \\ L_1 I_n(k)L_1 J_n(k)L_1 K_n(k)L_1 Y_n(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Введемо позначення для m похідних функцій n функцій Бесселя

$$I_n^m = Im, J_n^m = Jnm, K_n^m = Knm, Y_n^m = Ynm$$

Для симетричних коливань ($n=0$) маємо такі залежності

$$J0(x) = -I1(x); Y0(x) = -Y1(x); I0(x) = I1(x); K0(x) = -K1(x);$$

$$J02(x) = -J0(x) + \frac{J1(x)}{x}; Y02(x) = -Y0(x) + \frac{Y1(x)}{x}; I02(x) = I0(x) - \frac{I1(x)}{x};$$

$$K02(x) = K0(x) + \frac{K1(x)}{x}; J03(x) = \frac{J0(x)}{x} + \left(\frac{-2}{x^2} + 1 \right) J1(x); Y03(x) = \frac{Y0(x)}{x} + \left(\frac{-2}{x^2} + 1 \right) Y1(x);$$

$$I03(x) = \frac{-I0(x)}{x} + \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right) I1(x); K03(x) = \frac{-K0(x)}{x} - \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right) K1(x); SJ0(x) = J03(x) + \frac{J02(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot J0(x)}{x^3}$$

$$SY0(x) = Y03(x) + \frac{Y02(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot Y0(x)}{x^3}; SY0(x) = Y03(x) + \frac{Y02(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot Y0(x)}{x^3};$$

$$SK0(x) := K03(x) + \frac{K02(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot K0(x)}{x^3}$$

$$SK0(x) = K03(x) + \frac{K02(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot K0(x)}{x^3}; SI0(x) = I03(x) + \frac{I02(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot I0(x)}{x^3}.$$

Визначник (4) запишемо в такій формі

$$\gamma11(x) \cdot \gamma22(x) - \gamma12(x) \cdot \gamma21(x) = 0 \quad (5)$$

де

$$\gamma11(x) = J0(x) \cdot \delta0(x) + Y0(x) \cdot kj0(x) + K0(x) \cdot yj0(x); \gamma12(x) = I0(x) \cdot \delta0(x) + Y0(x) \cdot ki0(x) + K0(x) \cdot yi0(x);$$

$$\gamma21(x) = SJ0(x) \cdot \delta0(x) + SY0(x) \cdot kj0(x) + SK0(x) \cdot yj0(x); \gamma22(x) = SI0(x) \cdot \delta0(x) + SY0(x) \cdot ki0(x) + SK0(x) \cdot yi0(x);$$

$$ki0(x) = -I0(x \cdot c) \cdot K01(x \cdot c) + I01(x \cdot c) \cdot K0(x \cdot c);$$

$$\delta0(x) = Y0(x \cdot c) \cdot K01(x \cdot c) - Y01(x \cdot c) \cdot K0(x \cdot c);$$

$$kj0(x) = -J0(x \cdot c) \cdot K01(x \cdot c) + J01(x \cdot c) \cdot K0(x \cdot c);$$

$$yj0(x) = -Y0(x \cdot c) \cdot J01(x \cdot c) + Y01(x \cdot c) \cdot J0(x \cdot c);$$

$$y i 0(x) = -Y 0(x \cdot c) \cdot I 01(x \cdot c) + Y 01(x \cdot c) \cdot I 0(x \cdot c)$$

Рішення даного рівняння (5) приведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення частотного параметра k при $n=0$ (шарнірно-зашемлено)

	$c=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$s=0$	4.33	5.171	5.811	6.712	7.99	9.946	13.206
1	8.1	8.985	10.209	9.68	14.215	17.741	19.051,
2	11.528	12.87	14.665	11.08, 17.08	20.378	25.759	34.077
3	14.481	16.774, 17.774	19.135	17.597, 22.303	26.671	33.416	41.503
4	18.447	19.375, 20.686	23.6	25.473, 27.529	33.021	41	50.48

Для несиметричних коливань ($n = 1$) знаходимо

$$\begin{aligned} J2(x) &= -J0(x) + \frac{2J1(x)}{x}; Y2(x) = -Y0(x) + \frac{2Y1(x)}{x}; I2(x) = I0(x) - \frac{I1(x)}{x}; K2(x) = K0(x) + \frac{K1(x)}{x}; \\ J1(x) &= J0(x) - \frac{J1(x)}{x}; Y1(x) = Y0(x) - \frac{Y1(x)}{x}; I1(x) = I0(x) - \frac{I1(x)}{x}; K1(x) = -[K0(x) - \frac{K1(x)}{x}]; \\ J2(x) &= -J1(x) + \frac{J2(x)}{x}; Y2(x) = -Y1(x) + \frac{Y1(x)}{x}; I2(x) = I1(x) - \frac{I2(x)}{x}; K2(x) = K1(x) + \frac{K2(x)}{x}; \\ J3(x) &= (-\frac{3}{x^2} + 1)J2(x); Y3(x) = (-\frac{3}{x^2} + 1)Y2(x); I3(x) = (-\frac{3}{x^2} + 1)I2(x); K3(x) = (-\frac{3}{x^2} + 1)K2(x); \\ SJ1(x) &= J13(x) + \frac{J12(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot J1(x)}{x^3}; SY1(x) = Y13(x) + \frac{Y12(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot Y1(x)}{x^3}; \\ SK1(x) &= K13(x) + \frac{K12(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot K1(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Частотне рівняння матиме вигляд (6)

$$\begin{aligned} \alpha 11(x) \cdot \alpha 22(x) - \alpha 12(x) \cdot \alpha 21(x) &= 0 \\ \alpha 11(x) &= J1(x) \cdot \delta 1(x) + Y1(x) \cdot k j 1(x) + K1(x) \cdot y i 1(x); \\ \alpha 21(x) &= SJ1(x) \cdot \delta 1(x) + SY1(x) \cdot k j 1(x) + SK1(x) \cdot y i 1(x); \\ \alpha 22(x) &= SI1(x) \cdot \delta 1(x) + SI1(x) \cdot k i 1(x) + SK1(x) \cdot y i 1(x) \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \delta 1(x) &= Y1(x \cdot c) \cdot K11(x \cdot c) - Y11(x \cdot c) \cdot K1(x \cdot c); k i 1(x) = -K11(x \cdot c) \cdot I1(x \cdot c) + I11(x \cdot c) \cdot K1(x \cdot c) \\ k j 1(x) &= -J1(x \cdot c) \cdot K11(x \cdot c) + J11(x \cdot c) \cdot K1(x \cdot c); y i 1(x) = -Y1(x \cdot c) \cdot J11(x \cdot c) + Y11(x \cdot c) \cdot J1(x \cdot c) \\ y i 1(x) &= -Y1(x \cdot c) \cdot I11(x \cdot c) + Y11(x \cdot c) \cdot I1(x \cdot c) \end{aligned}$$

Рішення даного рівняння (6) приведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Значення частотного параметра k при $n=1$ (шарнірно-зашемлено)

	$c=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$s=0$	5.028	5.408	5.992,	5.134, 6.84	4.107, 8.09	3.423, 8.948, 10.011	2.93, 7.67, 12.224, 13.248
1	8.408	9.191	6.845, 10.346	11.97	10.74 14.277	14.261, 17.82 19.534	16.743 21.249 23.65
2	11.808	13.034	14.768	13.421, 17.149	17.113, 20.521	24.791, 25.604, 30.041	25.749, 30.245, 34.096
3	15.228	16.903	19.217	21.392, 22.655	26.781	33.44, 35.29	34.739, 39.232
4	18.605	20.793	23.68	27.573	29.75, 33.05	41.28	--

Для несиметричних коливань ($n = 2$) маємо

$$\begin{aligned} J3(x) &= -J1(x) + \frac{4J2(x)}{x}; Y3(x) = -Y1(x) + \frac{4Y2(x)}{x}; I3(x) = I1(x) - \frac{4I2(x)}{x}; \\ K3(x) &= K1(x) + \frac{4K2(x)}{x}; J21(x) = J1(x) - \frac{2J2(x)}{x}; Y21(x) = Y1(x) - \frac{2Y2(x)}{x}; \\ I21(x) &= I1(x) - \frac{2I2(x)}{x}; K21(x) = -(K1(x) + \frac{2K2(x)}{x}); J22(x) = (-1 + \frac{2}{x^2})J2(x) + \frac{J3(x)}{x}; \\ Y22(x) &= (-1 + \frac{2}{x^2})Y2(x) + \frac{Y3(x)}{x}; I22(x) = (1 + \frac{2}{x^2})J2(x) - \frac{J3(x)}{x}; K22(x) = K2(x) + \frac{K3(x)}{x}; \\ J23(x) &= (-\frac{1}{x})J2(x) + (-\frac{6}{x^2} + 1)J3(x); Y23(x) = (-\frac{1}{x})Y2(x) + (-\frac{6}{x^2} + 1)Y3(x); I23(x) = \frac{1}{x}I2(x) + (-\frac{6}{x^2} + 1)I3(x); \\ K23(x) &= \frac{1}{x}K2(x) - (-\frac{6}{x^2} + 1)K3(x); SJ2(x) = J23(x) + \frac{J22(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot J2(x)}{x^3}; \\ SY2(x) &= Y23(x) + \frac{Y22(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot Y2(x)}{x^3}; SI2(x) = I23(x) + \frac{I22(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot I2(x)}{x^3}; \\ SK2(x) &= K23(x) + \frac{K22(x)}{x} + \frac{(3-\mu) \cdot K2(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Частотне рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} \beta11(x) \cdot \beta22(x) - \beta12(x) \cdot \beta21(x) &= 0 \\ \beta11(x) &= J2(x) \cdot \delta2(x) + Y2(x) \cdot kj2(x) + K2(x) \cdot yj2(x); \\ \beta12(x) &= I2(x) \cdot \delta2(x) + Y2(x) \cdot ki2(x) + K2(x) \cdot yi2(x); \\ \beta21(x) &= SJ2(x) \cdot \delta2(x) + SY2(x) \cdot kj2(x) + SK2(x) \cdot yj2(x); \\ \beta22(x) &= SI2(x) \cdot \delta2(x) + SY2(x) \cdot ki2(x) + SK2(x) \cdot yi2(x) \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} ki2(x) &= -K21(x \cdot c) \cdot I2(x \cdot c) + I21(x \cdot c) \cdot K2(x \cdot c) \\ kj2(x) &= -J2(x \cdot c) \cdot K21(x \cdot c) + J21(x \cdot c) \cdot K2(x \cdot c) \\ yj2(x) &= -Y2(x \cdot c) \cdot J22(x \cdot c) + Y22(x \cdot c) \cdot J2(x \cdot c) \\ yi2(x) &= -Y2(x \cdot c) \cdot I21(x \cdot c) + Y21(x \cdot c) \cdot I1(x \cdot c) \\ \delta2(x) &= Y2(x \cdot c) \cdot K21(x \cdot c) - Y21(x \cdot c) \cdot K2(x \cdot c) \end{aligned}$$

Рішення даного рівняння (7) приведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення частотного параметра k при $n=2$ (шарнірно-зашемлено)

	$c=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$s=0$	5.886	5.418, 6.842	4.359	3.428, 3.692	2.74, 3.39, 8.162	10.34	3.35, 9.629, 13.475
1	9.043	7.32	7.089	7.415, 12.174	6.52, 13.5, 14.4	3.313, 5.431, 11.23, 16.65, 17.84	4.66, 14.268, 18.834, 23.368, 23.713
2	11.674	10.32	14.93	8.146, 17.238	19.976, 20.621	21.972, 25.732	27.89, 32.4
3	13.684	13.74, 17.279	19.56	22.573	26.366, 26.832, 32.715	27.262, 33.48	36.9, 41.4
4	16.708	20.99	23.837	24.94, 27.671	33.128	37.8	--

В систему алгебраїчних рівнянь (3) підставляємо знайдені корні $k_j = 1, 2, 3$ частотних рівнянь (5-7) і знаходимо рішення даної системи, виражаючи сталі $C_i (i = 2, 3, 4)$ через C_1 . значення вузлових параметра ρ_j

визначення положення вузлових кілець знаходимо радіус ρ^* (x^* - корінь частотного рівняння) при $n=0, 1, 2$ із умови

$$w(\rho^*, x^*) = 0$$

Дане рівняння представлене формулою

$$J_n(x^*) \cdot \delta n(x^*) + Y_n(\rho^* \cdot x) \cdot k_{jn}(x^*) + K_n(\rho^* \cdot x^*) y_{jn}(x^*) - \frac{\gamma_{11}(x^*)}{\gamma_{12}(x^*)} [J_n(\rho^* \cdot x^*) \cdot \delta n(x^*) + Y_n(\rho^* \cdot x^*) \cdot k_{in}(x^*) + K_n(\rho^* \cdot x^*) \cdot y_{in}(x^*)] = 0 \quad (8)$$

Із рішення рівняння (8) знаходимо положення вузлових кілець, які приведені в таблиці 4.

Таблиця 4

Величини вузлових діаметрів (шарнірно-защемлено) $\rho^* \cdot 10^3$

с	n = 0			n = 1			n = 2		
	s = 1	s = 2	s = 3	s = 1	s = 2	s = 3	s = 1	s = 2	s = 3
0.1	756	840, 512	882, 641, 492	757	842, 516	883, 694, 405	773	850, 534	887, 655, 418
0.2	782	858, 567	895, 681, 468	767	859, 568	846, 682, 469	789	862, 575	897, 687, 474
0.3	808	875, 621	908, 721, 535	808	876, 621	902, 721, 535	781	862, 595	909, 723, 537
0.4	835	894, 675	921, 761, 601	834	893, 675	923, 762, 602	836	881, 667	921, 762, 601
0.5	862	910, 729	987, 825, 725	862	910, 729	934, 800, 668	839	896, 776	916, 786, 660
0.6	889	928, 783	927, 824, 725	898	907, 762	947, 840, 734	863	928, 783	938, 827, 726
0.7	983	929, 826	955, 876, 798	935	944, 836	941, 866, 793	915	946, 837	954, 876, 798

Розглянемо випадок шарнірного закріплення отвору пластинки при вільному зовнішньому краї (Рис.2)
Граничні умови

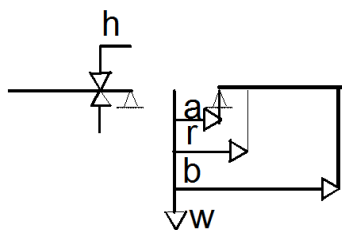


Рис. 2. Розрахункова схема 2

$$w(c, \theta, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(c, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w(c, \theta, t)}{k^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w(c, \theta, t)}{k \partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w(1, \theta, t)}{k^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w(1, \theta, t)}{k \partial r} \right) = 0$$

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{k^2 \partial \rho} + \frac{(2-\mu)}{k^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \rho \cdot \partial \theta^2} - (3-\mu) \cdot \frac{\partial^2}{k^3 \cdot \partial \theta^2} \right] w(1, \theta, t) = 0$$

$$L = \frac{d}{d\rho}; S = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \mu \left(-\frac{\partial}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \cdot \partial r^2} \right), Q =$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{k^2 \partial \rho} + \frac{(2-\mu)}{k^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \rho \cdot \partial \theta^2} - (3-\mu) \cdot \frac{\partial^2}{k^3 \cdot \partial \theta^2} = 0$$

При $n=0$ система матиме вигляд

$$a_{11}(x) \cdot a_{22}(x) - a_{12}(x) \cdot a_{21}(x) = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= QJ_0(x) \cdot \delta_0(\tilde{\delta}) + QY_0(x) \cdot kj_0(x) + QK_0(x) \cdot yj_0(x), \quad a_{12}(x) = QI_0(x) \cdot \delta_0(x) + QY_0(x) \cdot ki_0(x) + QK_0(x) \cdot yi_0(x), \\ a_{21}(x) &= SJ_0(x) \cdot \delta_0(x) + SY_0(x) \cdot kj_0(x) + SK_0(x) \cdot yj_0(x), \quad a_{22}(x) = SI_0(x) \cdot \delta_0(x) + SY_0(x) \cdot ki_0(x) + SK_0(x) \cdot yi_0(x), \\ ki_0(x) &= -I_0(x \cdot c) \cdot S_0(x \cdot c) + SI_0(x \cdot c) \cdot K_0(x \cdot c), \\ \delta_0(x) &= Y_0(x \cdot c) \cdot SK_0(x \cdot c) - SY_0(x \cdot c) \cdot K_0(x \cdot c), \\ kj_0(x) &= -J_0(x \cdot c) \cdot SK_0(x \cdot c) + SJ_0(x \cdot c) \cdot K_0(x \cdot c), \\ yj_0(x) &= -Y_0(x \cdot c) \cdot SJ_0(x \cdot c) + SY_0(x \cdot c) \cdot J_0(x \cdot c), \\ yi_0(x) &= -Y_0(x \cdot c) \cdot SI_0(x \cdot c) + SY_0(x \cdot c) \cdot I_0(x \cdot c) \end{aligned}$$

Рішення даного рівняння (9) приведено в таблиці 5.

При $p=1$ частотне рівняння системи (5) матиме вигляд

$$d11(x) \cdot d22(x) - d12(x) \cdot d21(x) = 0 \quad (10)$$

Таблиця 5

Значення частотного параметра k при $p=0$ (шарнірно-вільно)

	$c=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$s=0$	4.33	5.171	5.811	6.712	7.99	9.946	13.206
1	8.1	8.985	10.209	9.68	14.215	17.741	19.051
2	11.528	12.87	14.665	11.08 17.08	20.378	25.759	34.077
3	14.481	16.774, 17.774	19.135	17.597, 22.303	26.671	33.416	41.503
4	18.447	19.375, 20.686	23.6	25.473, 27.529	33.021	41	50.48

$$\begin{aligned} d11(x) &= QJ1(x) \cdot \delta1(x) + QY1(x) \cdot kj1(x) + QK1(x) \cdot yj1(x), \quad d12(x) = QI1(x) \cdot \delta1(x) + QY1(x) \cdot ki1(x) + QK1(x) \cdot yi1(x) \\ d21(x) &= SJ1(x) \cdot \delta1(x) + SY1(x) \cdot kj1(x) + SK1(x) \cdot yj1(x), \quad d22(x) = SI1(x) \cdot \delta1(x) + SY1(x) \cdot ki1(x) + SK1(x) \cdot yi1(x) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \delta1(x) &= Y1(x \cdot c) \cdot SK1(x \cdot c) - SY1(x \cdot c) \cdot K1(x \cdot c); \\ ki1(x) &= -SK1(x \cdot c) \cdot I1(x \cdot c) + SI1(x \cdot c) \cdot K1(x \cdot c) \\ kj1(x) &= -J1(x \cdot c) \cdot SK1(x \cdot c) + SJ1(x \cdot c) \cdot K1(x \cdot c); \\ yj1(x) &= -Y1(x \cdot c) \cdot SJ1(x \cdot c) + SY1(x \cdot c) \cdot J1(x \cdot c) \\ yi1(x) &= -Y1(x \cdot c) \cdot SI1(x \cdot c) + SY1(x \cdot c) \cdot I1(x \cdot c) \end{aligned}$$

Рішення даного рівняння (10) приведено в таблиці 6.

Таблиця 6

Значення частотного параметра k при $p=1$ (шарнірно-вільно)

s	$c=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	2.094	2.884	2.525	2.839	3.21, 4.107	3.583	2.934, 3.943
1	4.992	5.394	6.066	5.134, 6.918	7.998, 10.738	8.948, 10.011	7.669, 12.224, 13.203
2	8.365	9.189, 10.268	10.337,	11.916	14.213	14.261, 17.707	16.743, 21.249, 23.575, 25.75
3	11.77	13.025	14.721	13.422, 17.106	17.113, 20.47	24.791	-
4	15.2	16.88	17.895, 19.195	21.392, 22.329	23.44, 26.74	30.041	-

При $p=2$ система (5) матиме вигляд

$$n11(x) \cdot n22(x) - n12(x) \cdot n21(x) = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} n11(x) &= QJ2(x) \cdot \delta2(x) + QY2(x) \cdot kj2(x) + QK2(x) \cdot yj2(x), \quad n12(x) = QI2(x) \cdot \delta2(x) + QY2(x) \cdot ki2(x) + QK2(x) \cdot yi2(x); \\ n21(x) &= SJ2(x) \cdot \delta2(x) + SY2(x) \cdot kj2(x) + SK2(x) \cdot yj2(x), \quad n22(x) = SI2(x) \cdot \delta2(x) + SY2(x) \cdot ki2(x) + SK2(x) \cdot yi2(x); \\ ki2(x) &= -I2(x \cdot c) \cdot S2(x \cdot c) + SI2(x \cdot c) \cdot K2(x \cdot c); \\ \delta2(x) &= Y2(x \cdot c) \cdot SK2(x \cdot c) - SY2(x \cdot c) \cdot K2(x \cdot c); \\ kj2(x) &= -J2(x \cdot c) \cdot SK2(x \cdot c) + SJ2(x \cdot c) \cdot K2(x \cdot c); \\ yj2(x) &= -Y2(x \cdot c) \cdot SJ2(x \cdot c) + SY2(x \cdot c) \cdot J2(x \cdot c); \\ yi2(x) &= -Y2(x \cdot c) \cdot SI2(x \cdot c) + SY2(x \cdot c) \cdot I2(x \cdot c) \end{aligned}$$

Рішення даного рівняння (11) приведено в таблиці 7

Таблиця 7

Значення частотного параметра k при $n=2$ (шарнірно-вільно)							
s	$c=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	3.232	3.216	3.108	3.446	2.802	2.433, 5.432	2.251
1	6.086	5.674, 6.841	-	4.153	4.147, 6.507	4.301, 10.358, 11.233	9.628, 13.449, 14.268, 18.833
2	9.134	7.335	7.121	12.209	13.48, 14.406	17.829	27.88
3	11.803, 13.686	10.261	14.971	16.85, 17.319	19.976, 20.608	21.942, 25.697, 27.262	-
4	-	13.703, 17.28	19.524	22.54	26.374	-	-

Із рішення рівняння типу (8) при заданих граничних умовах знаходимо положення вузлових кілець, які приведені

Таблиця 8

Величини вузлових діаметрів $\rho^* \cdot 10^3$ (шарнірно-вільно)									
c	$n=0$			$n=1$			$n=2$		
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.1	755	859, 462	908, 649, 365	791	877, 534	913, 669, 399	803	881, 551	936, 734, 498
0.2	755	859, 450	901, 629, 335	802	884, 572	919, 699, 456	781	846, 400	896, 604, 254
0.3	800	873, 508	921, 698, 454	814	898, 621	930, 736, 521	-	841, 370	930, 737, 521
0.4	797	875, 449	924, 709, 492	898	914, 643	999, 877, 640	622	851, 415	948, 785, 595

Висновки

Для пластинки шарнірно закріпленої по внутрішньому контуру і з жорстко закріпленою зовнішньою границею та для пластинки з вільним зовнішнім торцем знайдено:

1. Частотні параметри симетричних ($n=0$) і несиметричних коливань ($n=0,1,2$) і для різного числа вузлових діаметрів $s=0,1\dots4$
2. Параметр ρ_i , що визначає положення вузлових діаметрів симетричних ($n=0$) і несиметричних коливань ($n=0,1,2$) і для різного числа вузлових діаметрів $s=0,1,2,3$

Анотація. Круглая кольцевая пластинка шарнирно закреплена по внутреннему контуру. Внешний контур зашкреплен или свободен. При решении задачи использованы функции Бесселя разного рода нулевого и первого порядка. Для каждой формы колебаний $n=0, 1, 2$ составлены частотные уравнения и уравнения для определения положения узловых окружностей. Проведены результаты вычислений собственных частот в случае, когда число узловых диаметров ($n=0,1,2$), а число узловых окружностей ($s=0, 1, 2$). Проведены результаты вычислений по определению положения узловых колец в случае, когда число узловых диаметров ($n=0,1,2$), а число узловых окружностей ($s=0, 1, 2, 3$). Работа может быть использована при определении частот и форм собственных колебаний элементов машин и приборов.

Ключевые слова: пластинка, скользящая, частоты, формы.

Annotation. Circular annual plate hinged fixed on an internal circuit which is jammed and free. For the decision of task the Bessel function of different sort of a zero and first order are used. For every form of vibrations, $n = 0, 1, 2$ worked out frequency equations and equalization for determination of position of nodal circumferences. The results of calculations of eigenfrequencies are conducted in the case when number of nodal diameters ($n = 0, 1, 2$), and number of nodal circumferences ($s = 0, 1, 2$). The results of calculations are conducted on position-finding nodal rings in the case when number of nodal diameters ($n = 0, 1, 2$), and the number of nodal circumferences ($s = 0, 1, 2, 3$). The work can be used for determination of eigenfrequencies of machines and devices.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Сахаров И.Е. Частоты собственных колебаний кольцевых пластинок, Известия АН СССР, ОТН, №5, 1957.
2. Сахаров И.Е. Динамические жёсткости в теории осесимметричных колебаний круглых и кольцевых пластинок, Известия АН СССР, Механика, №5, 1959.
3. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок. Справочное пособие.-К: Наукова думка, 1964,-287с.
4. Справочник по динамике сооружений. Под ред. Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича.- М:Стройиздат, 1972,-511с.
5. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин.-К : Будівельник, 1973,- 487с.
6. Чемерис О.М Коливання круглих шарнірно закріплених кільцевих пластин. //Вісник НТУУ “КПІ”, Серія «Машинобудування», – № 62, 2011, С183-186
7. Чемерис О. М. Коливання кільцевої пластинки з ковзною опорою. //Вісник НТУУ “КПІ”, Серія
8. Коренев В.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях.-М: Физматгиз, 1969,-358с.

References

1. Saharov I.E. Chastoti sobstvennyh kolebanij kol'cevyh plastinok [Frequencies of eigentones of circular plates]. Izvestija AN SSSR, OTN no 5, 1957.
2. Saharov I.E. Dinamicheskie zhjostkosti v teorii osesimmetrichnyh kolebanij kruglyh i kolcevyh plastinok, [Dynamic inflexibilities are in the theory of axisymmetrical vibrations of round and circular plates]. Izvestija AN SSSR, Mehanika, no 5, 1959.
3. Gontkevich V.S. Sobstvennye kolebanija plastinok. Spravochnoe posobie [Frequencies of eigentones plates. Certificate manual] Kyiv: Naukova dumka, 1964, 287p.
4. Spravochnik po dinamike sooruzhenij [Reference book on the dynamics of buildings]. Pod red. B.G.Koreneva, I.M.Rabinovicha. Moscow: Strojizdat, 1972, 511p.
5. Vajnberg D.V. Spravochnik po prpochnosti,ustojchivosti i kolebanijam plastin [Reference book on durability, stability and vibrations of plates]. Kyiv: Budivelnik, 1973, 487p.
6. Chemeris O Коливання круглих шарнірно закріплених кільцевих пластин. Вісник НТУУ “КПІ”, Серія «Машинобудування», No 62, 2011, С183-186
7. Chemeris O. Коливання кільцевої пластинки з ковзною опорою. Вісник НТУУ “КПІ”, Серія «Машинобудування», No 64, 2012.
8. Korenev V.G. Nekotorye zadachi teorii uprugosti i teploprovodnosti, reshaemye v besselevykh funkciyah [Some tasks of theory of resiliency and heat conductivity Some tasks of theory of resiliency and heat conductivity which are solved Bessel functions]. Moscow: Fizmatgiz, 1969, 358p.

Подана до редакції 12.12.2012